

$$f(x) = x^3 e^x.$$

1. On définit la suite (u_n) par $u_0 = -1$ et, pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = f(u_n)$.

a. • $u_1 = (-1)^3 e^{-1} = -e^{-1} = -\frac{1}{e} \approx -0,368$;

• $u_2 = f(u_1) = (-e^{-1})^3 (e^{-e^{-1}}) = -e^{-3} \times (e^{-e^{-1}}) = -e^{-3-e^{-1}} \approx -0,034$.

b. On a donc $u_2 \approx -0,034$.

2. a. En dérivant $f(x)$ comme un produit on obtient :

$$f'(x) = 3x^2 e^x + x^3 e^x = x^2 e^x (3 + x).$$

b.

	$-\infty$	-3	$+\infty$
f	0	$-27e^{-3}$	$+\infty$

• Quel que soit le réel x , $x^2 \geq 0$ et $e^x > 0$, donc le signe de $f'(x)$ est celui de $3+x$ qui s'annule pour $x = -3$, d'où les deux intervalles de variations;

$3+x < 0 \iff x < -3$: sur $]-\infty; -3[$, $f'(x) < 0$: la fonction f est donc décroissante sur $]-\infty; -3[$;

$3+x > 0 \iff x > -3$: sur $] -3; +\infty[$, $f'(x) > 0$: la fonction f est donc croissante sur $] -3; +\infty[$;

$f(-3) = (-3)^3 \times e^{-3} = -27e^{-3} = -\frac{27}{e^3} \approx -1,344$ est le minimum de la fonction sur \mathbb{R} .

• On a $f(0) = 0^3 \times e^0 = 0 \times 1 = 0$;

• De $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$, on a par produit de limites

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty.$$

c. *Initialisation* : avec $u_0 = -1$ et $u_1 \approx -0,368$, on a bien : $-1 \leq u_0 \leq u_1 \leq 0$: l'encadrement est vrai au rang 0.

Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}$ et supposons que $-1 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 0$.

On a vu que sur l'intervalle $] -3; +\infty[$, donc a fortiori sur l'intervalle $] -1; +\infty[$, la fonction est strictement croissante.

On a donc par croissance de f : $f(-1) \leq f(u_n) \leq f(u_{n+1}) \leq f(0)$, ou encore :

$$u_1 \leq u_{n+1} \leq u_{n+2} \leq f(0)$$

et comme $u_1 \approx -0,338$, $-1 \leq u_1$ et $f(0) = 0$, on a bien :

$$-1 \leq u_{n+1} \leq u_{n+2} \leq 0.$$

La relation est vraie au rang $n+1$.

Conclusion : l'encadrement est vrai au rang 0 et s'il est vrai au rang n , $n \in \mathbb{N}$, il est encore vrai au rang $n+1$: d'après le principe de récurrence, pour tout entier naturel n , on a : $-1 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 0$.

d. La question précédente montre que :

- la suite (u_n) est croissante;
- la suite (u_n) est majorée par 0;

La suite (u_n) est donc convergente vers une limite ℓ , avec $\ell \leq 0$.

e. On résout dans $] -1; 0[$, (car d'après la question précédente tous les termes de la suite appartiennent à cet intervalle) l'équation :

$f(x) = x \iff x^3 e^x = x \iff x^3 e^x - x = 0 \iff x(x^2 e^x - 1) = 0 \iff x = 0$, car on admet que l'équation $x^2 e^x - 1 = 0$ n'a pas de solution dans l'intervalle $] -1; 0[$.

Conclusion $\ell = \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$.